

HỌC TOÁN LIVESTREAM CÙNG THẦY HIẾU

LỚP 5 - BUỔI 08

CHỦ ĐỀ. TÍNH NHANH BIỂU THỨC PHÂN SỐ (tiếp theo)

IV. Dạng toán “tiêu diệt hai phân số đứng cạnh nhau”

Đây là dạng toán yêu cầu tính tổng một dãy các phân số có quy luật, mà quy luật ở mẫu số là tích các thừa số. Ở dạng toán này, chúng ta cần phân tích mẫu số thành các thừa số có quy luật nhất định, nhận xét được mối liên quan giữa tổng, hoặc hiệu các thừa số ở mẫu số và tử số.

Bước 1. Phát hiện quy luật của mẫu số, tử số (thường sẽ là tích của các thừa số được lặp lại).

- Nếu đề bài chưa cho tích, ta hãy phân tích mẫu thành các tích
- Nếu phân tích rồi mà chưa được, ta hãy nhân thêm 1 số nào đó để phân tích được thành có quy luật.
- Mẫu số của phân số này gấp bao nhiêu lần của phân số trước?

Bước 2. Nhận xét các thừa số ở mẫu.

- Hiệu các thừa số ở mẫu không thay đổi \Rightarrow dùng biến đổi: $\frac{b-a}{a \times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Sau khi biến đổi sẽ được các phân số có tử số bằng nhau, mẫu số có lặp lại và triệt tiêu lẫn nhau.
- Tổng các thừa số ở mẫu số bằng tử số \Rightarrow dùng biến đổi $\frac{b+a}{a \times b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Với những bài này sẽ có dấu +, - xen kẽ, khi đó ta cũng triệt tiêu được các số giống nhau.
- Nếu mẫu số sau gấp mẫu số trước 1 số lần \Rightarrow ta làm bằng cách nhân thêm đúng số lần đó...
- Nếu mẫu số hơn (kém) tử số cùng 1 số thì nghĩ đến chuyện lấy phần bù.

Ví dụ: $\frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{10}$

Bài 1. Tính giá trị của $A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$

Nhận xét: Đây là bài khá cơ bản. Ta thấy các thừa số ở mẫu số có quy luật là $1 \times 2; 2 \times 3, \dots$

Hơn nữa $2 - 1 = 1, 3 - 2 = 1, \dots$ như vậy hiệu hai thừa số ở mẫu số

Ta có: $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{2-1}{1 \times 2} = \frac{2}{1 \times 2} - \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{3-2}{2 \times 3} = \frac{3}{2 \times 3} - \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\frac{1}{99 \times 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

Từ đó ta có: $A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

Bài 2. Tính giá trị của $A = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{99 \times 101}$

Bài 3. Tính giá trị của $A = \frac{2}{3 \times 7} + \frac{2}{7 \times 11} + \frac{2}{11 \times 15} + \dots + \frac{2}{99 \times 103}$

Hướng dẫn giải:

Ta thấy các thừa số ở mẫu số có sự lặp lại và $7 - 3 = 11 - 7 = 15 - 11 = 4 \dots$

Như vậy, chúng ta cần làm xuất hiện tử số bằng hiệu hai thừa số ở mẫu.

Xét :

$$A \times 2 = \frac{4}{3 \times 7} + \frac{4}{7 \times 11} + \frac{4}{11 \times 15} + \dots + \frac{4}{99 \times 103}$$

$$A \times 2 = \frac{7-3}{3 \times 7} + \frac{11-7}{7 \times 11} + \frac{15-11}{11 \times 15} + \dots + \frac{103-99}{99 \times 103}$$

$$A \times 2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{103}$$

$$A \times 2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{103} = \frac{100}{309}$$

$$A = \frac{100}{309} : 2 = \frac{50}{309}$$

Bài 4. Tính giá trị của $A = \frac{7}{2} + \frac{7}{6} + \frac{7}{12} + \frac{7}{20} + \frac{7}{30} + \frac{7}{42} + \frac{7}{56} + \frac{7}{72} + \frac{7}{90}$

Bài 5. Tính giá trị của $A = \frac{5}{3 \times 6} + \frac{5}{6 \times 9} + \frac{5}{9 \times 12} + \frac{5}{12 \times 15} + \dots + \frac{5}{96 \times 99}$

Bài 6. Tính giá trị của $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{120}$

Bài 7. Tính $A = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+99}$

Bài 8. Tính $A = \frac{505}{10 \times 1212} + \frac{505}{12 \times 1414} + \frac{505}{14 \times 1616} + \dots + \frac{505}{96 \times 9898}$

Bài 9. Tính $A = \frac{2}{1 \times 3} - \frac{4}{3 \times 5} + \frac{6}{5 \times 7} - \dots - \frac{20}{19 \times 21}$

Giải: $A = \frac{2}{1 \times 3} - \frac{4}{3 \times 5} + \frac{6}{5 \times 7} - \dots - \frac{20}{19 \times 21}$

$$2 \times A = \frac{4}{1 \times 3} - \frac{8}{3 \times 5} + \frac{12}{5 \times 7} - \dots - \frac{40}{19 \times 21}$$

$$2 \times A = \frac{1+3}{1 \times 3} - \frac{3+5}{3 \times 5} + \frac{5+7}{5 \times 7} - \dots - \frac{19+21}{19 \times 21}$$

$$2 \times A = \left(\frac{3}{1 \times 3} + \frac{1}{1 \times 3} \right) - \left(\frac{5}{3 \times 5} + \frac{3}{3 \times 5} \right) + \left(\frac{7}{5 \times 7} + \frac{5}{5 \times 7} \right) - \dots - \left(\frac{21}{19 \times 21} + \frac{19}{19 \times 21} \right)$$

$$2 \times A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) - \dots - \left(\frac{1}{19} + \frac{1}{21} \right)$$

$$2 \times A = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots - \frac{1}{19} - \frac{1}{21} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

$$A = \frac{20}{21} : 2 = \frac{10}{21}$$

Bài 10. Tính $A = 1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90}$

Bài 11. Tính $A = \frac{1}{15} + \frac{2}{45} + \frac{3}{135} + \frac{4}{345} + \frac{5}{759}$

Bài 12. Tính $A = 10 \times \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{5}{2 \times 3} + \frac{11}{3 \times 4} + \frac{19}{4 \times 5} + \dots + \frac{89}{9 \times 10} \right)$

→ Khó hơn tý nữa nào ☺

Bài 13. Tính $S = \frac{1}{1 \times 3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5 \times 7} + \dots + \frac{1}{99 \times 101 \times 103}$

Bài này khác với bài số 1 ở chỗ mẫu số có quy luật phức tạp hơn, mẫu số là tích của 3 số lẻ liên tiếp. Để ý thấy rằng 2 thừa số sau của mỗi mẫu số đều được lặp lại. Và hiệu giữa thừa số cuối trừ đi thừa số đầu đều không đổi.

Ta thấy: $\frac{1}{1 \times 3 \times 5} = \frac{1}{4} \times \frac{5-1}{1 \times 3 \times 5} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{5}{1 \times 3 \times 5} - \frac{1}{1 \times 3 \times 5} \right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} \right)$

$$\frac{1}{3 \times 5 \times 7} = \frac{1}{4} \times \frac{7-3}{3 \times 5 \times 7} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{7}{3 \times 5 \times 7} - \frac{3}{3 \times 5 \times 7} \right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3 \times 5} - \frac{1}{5 \times 7} \right)$$

...

$$\frac{1}{99 \times 101 \times 103} = \frac{1}{4} \times \frac{103-99}{99 \times 101 \times 103}$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{103}{99 \times 101 \times 103} - \frac{99}{99 \times 101 \times 103} \right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{99 \times 101} - \frac{1}{101 \times 103} \right)$$

Cộng theo vế ta có: $S = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} - \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{99 \times 101} - \frac{1}{101 \times 103} \right)$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{101 \times 103} \right) = \frac{2600}{31209}$$

Bài 14. Tính giá trị: $S = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2019 \times 2020 \times 2021}$

Bài 15 (Siêu khó với lớp 5 đấy nhé ☺). Tính $\frac{A}{B}$ biết rằng:

$$A = \frac{1}{1 \times 300} + \frac{1}{2 \times 301} + \dots + \frac{1}{101 \times 400}; \quad B = \frac{1}{1 \times 102} + \frac{1}{2 \times 103} + \dots + \frac{1}{298 \times 399} + \frac{1}{299 \times 400}$$