HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI HSG LỚP 9 TP HÀ NỘI – NGÀY THI 8/1/2020.

Đàm Thanh Phương – Nguyễn Thành Chương – Trần Hữu Hiếu

Câu lạc bộ toán học MathSpace – http://mathspace.edu.vn/

Bài 1.

1. Giải phương trình. Điều kiện: $x \geq \frac{-5}{4}$.

$$\left(4x+2\right)\sqrt{x^2+2x+5} = \left(x^2+2x+2\right)\sqrt{4x+5}$$
$$\Leftrightarrow \left(4x+5\right)\sqrt{x^2+2x+5} - 3\sqrt{x^2+2x+5} = \left(x^2+2x+5\right)\sqrt{4x+5} - 3\sqrt{4x+5}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+5}\sqrt{x^2+2x+5}\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{x^2+2x+5}\right) + 3\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{x^2+2x+5}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{x^2+2x+5}\right)\left(\sqrt{4x+5}\sqrt{x^2+2x+5}+3\right) = 0.$$

Ta thấy $\sqrt{4x+5}\sqrt{x^2+2x+5}+3 > 0$ nên phương trình tương đương với

$$\sqrt{4x+5}-\sqrt{x^2+2x+5} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $x \in \left\{0;2\right\}$.

2. Nếu c là số lớn nhất trong 4 số, từ giả thiết và áp dụng BĐT Cô Si ta có:

$$d^3 = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc,$$
$$a^5 = \frac{2a^5+b^5+c^5+d^5}{5} \geq a^2bcd \Rightarrow a^3 \geq bcd,$$
$$b^7 = \frac{4b^7+c^7+d^7+a^7}{7} \geq b^3cda \Rightarrow b^3 \geq acd.$$

Từ đây sau khi nhân các bất đẳng thức trên ta được $abd \geq c^3 \Rightarrow a=b=c=d$.

Nếu d là số lớn nhất thì từ giả thiết $3d^3 = a^3+b^3+c^3 \leq d^3+d^3+d^3 \Rightarrow a=b=c=d$. Tương tự cho trường hợp a hoặc b.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2+3n+11$ không chia hết cho 49.

Giả sử $a=n^2+3n+11 \vdots 49$ (*).

Suy ra $4a=4n^2+12n+44 \vdots 49$, suy ra $4a=4n^2+12n+44 \vdots 7$.

Ta có $4n^2+12n+44=\left(2n+3\right)^2+35 \vdots 7$. Do $35 \vdots 7$ nên suy ra $\left(2n+3\right)^2 \vdots 7$. Vì 7 là số nguyên tố nên từ đó suy ra được $\left(2n+3\right) \vdots 7$.

Từ $\left(2n+3\right) \vdots 7 \Rightarrow \left(2n+3\right)^2 \vdots 49 \Rightarrow 4n^2+12n+9 \vdots 47 \Rightarrow 4n^2+12n+9+35$ không chia hết cho 49 vì 35 không chia hết cho 49. Suy ra $4n^2+12n+44$ không chia hết cho 49. Điều này mâu thuẫn với (*). Vậy giả sử (*) là sai, hay ta có đpcm.

2. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $\left(x,y,p\right)$ với p là số nguyên tố thỏa mãn $x^2+p^2y^2=6\left(x+2p\right)$

Từ giả thiết ta có $x^2-6x+p^2y^2-12p=0$. Để tồn tại x thì

$\Delta'_x=9+12p-p^2y^2 \ge 0 \Leftrightarrow y^2 \le \dfrac{9+12p}{p^2}$ (*)

Xét bất phương trình $\dfrac{9+12p}{p^2}<1 \Leftrightarrow p^2-12p-9>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p<6-3\sqrt{5} \\ p>6+3\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Do p nguyên dương nên $p \ge 13$. (**)

Từ đó ta có các khả năng sau, với p nguyên tố, x,y nguyên dương.

+/ $p=2$, $y^2 \le \dfrac{33}{4}$, suy ra $y^2=1; y^2=4$. Các giá trị này thay vào ko tìm được x nguyên dương thỏa mãn.

+/ p = 3. $y^2 \le \dfrac{9+12\times 3}{9}=5$, suy ra $y^2=1; y^2=4$. Ta được x=9; x=6 tương ứng.

+/p=7. $y^2 \le \frac{9+12\times 7}{49} = \frac{93}{49} < 2$, suy ra $y^2 = 1$. Các giá trị này thay vào ko tìm được x nguyên dương thỏa mãn.

+/ p=11. $y^2 \le \frac{9+12\times 11}{121} = \frac{141}{121} < 2$, suy ra $y^2 = 1$. Các giá trị này thay vào ko tìm được x nguyên dương thỏa mãn.

+/ Với các số nguyên tố $p \ge 13$, theo (*) và (**) ta có $y^2 < 1$, nghĩa là không tồn tại x,y thỏa mãn.

Kết luận. Có hai bộ (x,y,p) thỏa mãn bài toán là (9,1,3) và (6,2,3).

Bài 3.

1. Từ $5(x-y)^2 \le (x^2+y^2)$ suy ra:

   $2x^2 - 5xy + 2y^2 \le 0 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y) \le 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2} \le x \le 2y$, hay $\frac{1}{2} \le \frac{x}{y} \le 2$ (đpcm).

2. Từ điều kiện: $5(x+y+x)^2 \ge 14(x^2+y^2+z^2)$ suy ra:

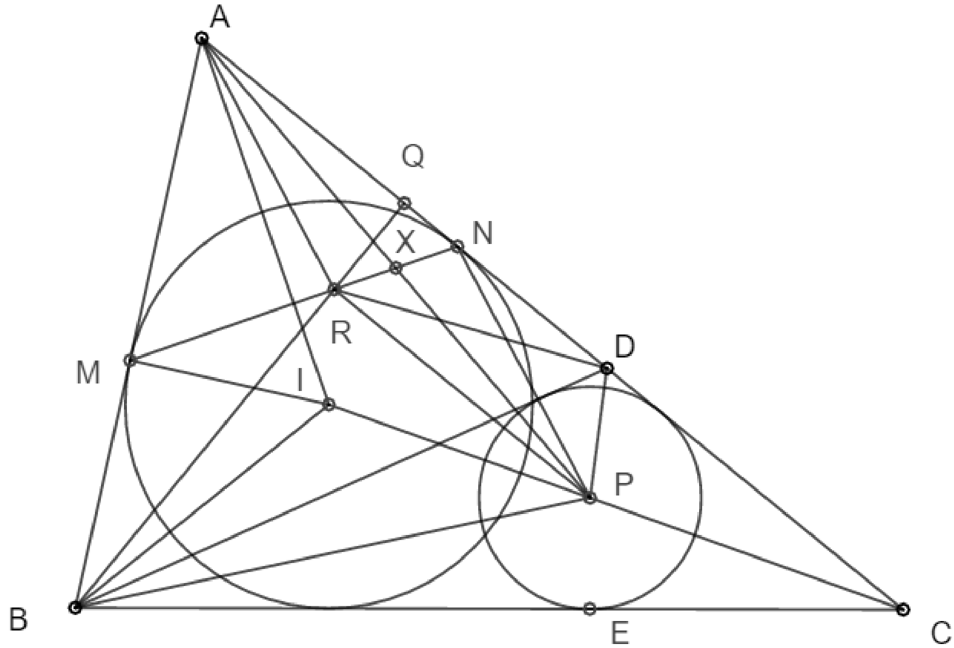
   $14(x^2+y^2+z^2) - 5(x+y+z)^2 \le 0 \Leftrightarrow 9x^2+9y^2+9z^2-10xy-10yz-10zx \le 0$.

   Hay: $9y^2 - 10(\text{x}+\text{z})\,\text{y} + (9\,\text{x}^2 + 9z^2 - 10xz) \le 0$ đây là bất phương trình bậc 2 đối với y và có nghiệm là số thực dương. Từ đó suy ra:

   $\Delta'_y = \left[5(x+z)\right]^2 - 9.(9x^2+9z^2-10xy) \ge 0 \Leftrightarrow -56x^2 + 140xz - 56z^2 \ge 0$, từ đó có được: $2x^2 - 5xz + 2z^2 \le 0 \Leftrightarrow (x-2z)(2x-z) \le 0$, tức là có: $\frac{z}{2} \le x \le 2z \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{x}{z} \le 2$.

   Xét biểu thức $P = \frac{2x+z}{x+2z} = \frac{2\frac{x}{z}+1}{\frac{x}{z}+2} = 2 - \frac{3}{\frac{x}{z}+2}$, từ đây suy ra $P_{\min} = 2 - \frac{3}{\frac{1}{2}+2} = \frac{4}{5}$ khi $\frac{x}{z} = \frac{1}{2}$ và $P_{\max} = 2 - \frac{3}{2+2} = \frac{5}{4}$ khi $\frac{x}{z} = 2$.

Bài 4.



1. Ta có: $\angle BMR = 180^0 - \angle AMN = 180^o - \frac{1}{2}(180^0 - \angle BAC) = 90^0 + \frac{\angle BAC}{2}$

Lại có:

$\angle BIP = \angle BIC = 180^0 - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \angle BAC) = 90^0 + \frac{1}{2}\angle BAC$

Suy ra: $\angle BMR = \angle BIP$ (1)

Mặt khác có: $\angle MBR = \angle ABQ = 90^0 - \angle BAC$

$\angle IBP = 180^0 - (\angle BIC + \angle BPI) = 180^0 - \left[(90^0 + \frac{\angle BAC}{2}) + (\angle PBC + \angle PCB)\right]$

$=180^0 - \left[(90^0 + \frac{\angle BAC}{2}) + (\angle BAC + \frac{\angle ABC}{2} - 90^0 + \frac{\angle ACB}{2}\right] = 90^0 - \angle BAC$

Suy ra: $\angle MBR = \angle IBP$ (2)

Từ (1) và (2) có được: $\Delta BMR \sim \Delta BIP (g.g)$ (đ.p.c.m)

2. Theo 1) có: $\angle MBR = \angle IBP$ và $\dfrac{BM}{BI} = \dfrac{BR}{BP}$ (hay $\dfrac{MB}{RB} = \dfrac{BI}{BP}$).

Xét hai tam giác MBI và RBP có: $\angle MBI = \angle RBP(\angle MBR + \angle RBI = \angle IBP + \angle RBI)$ và $\dfrac{MB}{RB} = \dfrac{BI}{BP}$, suy ra: $\Delta MBI \sim \Delta RBP$ (c.g.c). Từ đó có: $\angle BRP = \angle BMI = 90^0$, hay: $PR \perp BQ$, kết hợp với $AC \perp BQ$ có được: PR // AC (đ.p.c.m)

3. Theo 2) có: $\angle NRP = \angle ANM = 90^0 - \dfrac{\angle BAC}{2}$ (3)

Mặt khác: Do D là điểm đối xứng của A qua Q nên $\angle BDA = \angle BAC$, suy ra:

$$\angle PDC = \frac{1}{2}\angle BDC = \frac{1}{2}(180^0 - \angle BDA) = \frac{1}{2}(180^0 - \angle BAC) = 90^0 - \frac{\angle BAC}{2}$$

Mà $\angle PDC = \angle DPR$ (so le trong) nên có: $\angle DPR = 90^0 - \dfrac{\angle BAC}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) kết hợp với ND // RP, ta có được tứ giác NDPR là hình thang cân. Suy ra: $NR = DP$

Xét hai tam giác ARN và RDP có: AR = RD (do D đối xứng với A qua Q), $\angle RAN = \angle DRP(= \angle RDA)$,

$\angle \mathrm{AR}N = \angle RDP(= 180^0 - \angle RAN - \angle \mathrm{ANR}(\angle \mathrm{ANR} = \angle DPR))$ và RN = DP. Từ đó có được: $\Delta ARN = \Delta RDP$ (c.g.c), suy ra: AN = RP.

Do RP // AN nên: $\dfrac{PX}{AX} = \dfrac{RP}{AN} = 1$ (Định lý Ta-lét), điều đó chứng tỏ MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP (đ.p.c.m)

Bài 5. Giả sử $k \le 7$.

Gọi $S = 2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_n}$ là tổng số bi của mỗi hộp với $a_1 < a_2 < ... < a_n$, suy ra $2^{a_1} < S < 2^{a_1 + 1}$.

Dễ thấy từ giả thiết suy ra số bi bỏ vào mỗi hộp ở mỗi bước không vượt quá $T = 2^{a_1} + 2^{a_1 - 1} + ... + 2^{a_1 - 14}$.

Suy ra $k.T \le 7.\left(2^{a_1} + 2^{a_1-1} + ... + 2^{a_1-14}\right) < 7.2^{a_1+1} = 14.2^{a_1} < 15S$, mâu thuẫn.

Vậy $k \ge 8$.

Với k = 8 ta chỉ ra được một phương án bỏ bi sao cho số bi mỗi hộp là 8.

(Với hộp thứ nhất, số bi ứng với các bước bỏ là: 1,1,1,1,1,1,1,1

Với hộp thứ 2: 2,2,2,2,0,0,0,0

Với hộp thứ 3: 4,4,0,0,0,0,0,0

Với hộp thứ 4: 0,0,4,4,0,0,0,0

Với hộp thứ 5: 0,0,0,0,4,4,0,0

Với hộp thứ 6: 0,0,0,0,0,0,4,4

Với hộp thứ 7: 8,0,0,0,0,0,0,0

Hộp thứ 8 trở đi tương tự, ..cho đến hộp thứ 15: 0,0,0,0,0,0,0,8/

Kết luận 8 là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Hết.