

## CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ: TÍNH NHANH DÃY PHÂN SỐ CÓ QUY LUẬT DÃY PHÂN SỐ CÓ MẪU SỐ TRIỆT TIÊU

### 2. Dãy phân số có quy luật triệt tiêu lẫn nhau

#### 2.1 Kiến thức ghi nhớ

Đây là dạng toán yêu cầu tính tổng một dãy các phân số có quy luật, mà quy luật ở mẫu số là tích các thừa số. Ở dạng toán này, chúng ta cần phân tích mẫu số thành các thừa số có quy luật nhất định, nhận xét được mối liên quan giữa tổng, hoặc hiệu các thừa số ở mẫu số và tử số.

**Bước 1: Phát hiện quy luật của mẫu số, tử số (thường sẽ là tích của các thừa số được lặp lại).**

- Nếu đề bài chưa cho tích, ta hãy phân tích mẫu thành các tích
- Nếu phân tích rồi mà chưa được, ta hãy nhân thêm 1 số nào đó để phân tích được thành có quy luật.
- Mẫu số của phân số này gấp bao nhiêu lần của phân số trước?

**Bước 2: Nhận xét các thừa số ở mẫu.**

- Hiệu các thừa số ở mẫu không thay đổi  $\Rightarrow$  dùng biến đổi:  $\frac{b-a}{a \times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ . Sau khi biến đổi sẽ được các phân số có tử số bằng nhau, mẫu số có lặp lại và triệt tiêu lẫn nhau.
- Tổng các thừa số ở mẫu số bằng tử số  $\Rightarrow$  dùng biến đổi  $\frac{b+a}{a \times b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ . Với những bài này sẽ có dấu +, - xen kẽ, khi đó ta cũng triệt tiêu được các số giống nhau.
- Nếu mẫu số sau gấp mẫu số trước 1 số lần  $\Rightarrow$  ta làm bằng cách nhân thêm đúng số lần đó...
- Nếu mẫu số hơn (kém) tử số cùng 1 số thì nghĩ đến chuyện lấy phần bù. Ví dụ:  $9/10 = 1 - 1/10$

#### 2.2 Bài tập vận dụng

**Bài 1:** Tính giá trị của

$$A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

**Phân tích:** Đây là bài khá cơ bản. Ta thấy các thừa số ở mẫu số có quy luật là  $1 \times 2, 2 \times 3, \dots$

Hơn nữa  $2 - 1 = 1, 3 - 2 = 1, \dots$  như vậy hiệu hai thừa số ở mẫu số của mỗi phân số đều bằng nhau. Hơn nữa ta thấy các phân số ở đây đều có sự "liên kết":  $1 \times 2; 2 \times 3; 3 \times 4; \dots$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{1 \times 2} &= \frac{2-1}{1 \times 2} = \frac{2}{1 \times 2} - \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2 \times 3} &= \frac{3-2}{2 \times 3} = \frac{3}{2 \times 3} - \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &\dots \\ \frac{1}{99 \times 100} &= \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

**Bài 2:** Tính giá trị của

$$A = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{99 \times 101}$$

**Phân tích:** Ở bài này ta thấy mẫu số là các tích có khoảng cách các thừa số là 2 như  $3 - 1 = 2$ ;  $5 - 3 = 2$ ;  $7 - 5 = 2 \dots$

Nhận thấy:  $\frac{2}{1 \times 3} = \frac{3-1}{1 \times 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$

$$\frac{2}{3 \times 5} = \frac{5-3}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{5 \times 7} = \frac{7-5}{5 \times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

...

$$\frac{2}{99 \times 101} = \frac{101-99}{99 \times 101} = \frac{1}{99} - \frac{1}{101}$$

Từ đó ta có:  $A = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{99 \times 101}$

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

**Bài 3:** Tính giá trị biểu thức sau:  $A = \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{97 \times 100}$

**Phân tích:** Ở bài này ta thấy các mẫu số đều có các thừa số có hiệu bằng 3. Tuy nhiên tử số mỗi phân số là 1. Vì thế, ta sẽ làm xuất hiện tử số chính là hiệu hai thừa số ở mẫu số  $\Rightarrow$  ta nhân thêm 3.

Ta có:  $A \times 3 = \frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \dots + \frac{3}{97 \times 100}$

$$A \times 3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100}$$

$$A \times 3 = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

$$A = \frac{99}{100} : 3 = \frac{33}{100}$$

Chú ý: Cần nhớ rằng ta đã nhân thêm 3 để xuất hiện dạng tử số bằng hiệu hai thừa số ở mẫu số để sau đó tách  $\frac{b-a}{a \times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$  nên ta cần chia cho 3 để tính ra kết quả của A. Với bài thi trắc nghiệm, rất nhiều học sinh có phương pháp nháp không tốt, tính nhầm, ẩu mà quên chia 3 dẫn đến đưa ra đáp số sai.

**Bài 4:** Tính giá trị biểu thức sau:  $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{9900}$

**Phân tích:** Bài này chưa cho mẫu số dưới dạng tích các thừa số, ta thử nghĩ đến việc tách mẫu số thành tích xem các thừa số ở mẫu số có quy luật hay không.

Ta thấy  $2 = 1 \times 2$ ;  $6 = 2 \times 3$ ;  $12 = 3 \times 4$ ; ...  $9900 = 99 \times 100$

Như vậy mẫu số đã được đưa về dạng “quen thuộc” như các bài ở trên.

$$\text{Ta có } A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

**Bài 5:** Tính giá trị của biểu thức sau:  $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{4950}$

**Phân tích:** Ta thử tách mẫu số:  $3 = 1 \times 3$ ;  $6 = 2 \times 3$ ;  $10 = 2 \times 5$ ...ta thấy các mẫu số được tách và không xuất hiện quy luật “liên kết” nhau như ở các bài trước. Muốn triệt tiêu lẫn nhau sau khi tách, ta cần các mẫu số có quy luật “liên kết” nhau ví dụ như  $1 \times 3$ ;  $3 \times 5$ ;  $5 \times 7$ ;... tức số xuất hiện sau ở mẫu số trước trở thành số xuất hiện đầu ở mẫu số tiếp theo...

Ta thử **nhân thêm** để xuất hiện quy luật:

Ta có:  $2 \times 3 = 2 \times 3$ ;  $2 \times 6 = 3 \times 4$ ;  $2 \times 10 = 4 \times 5$ ;...  $2 \times 4950 = 99 \times 100 \Rightarrow$  ta có quy luật quen thuộc.

$$\text{Giải: Ta có } S \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{4950} \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{9900} = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

$$\Rightarrow S \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100}$$

$$\Rightarrow S = \frac{49}{100} : \frac{1}{2} = \frac{49}{50}$$

**Bài 6:** Tính  $A = \frac{2}{1 \times 3} - \frac{4}{3 \times 5} + \frac{6}{5 \times 7} - \dots - \frac{20}{19 \times 21}$

**Phân tích:** Ở bài này ta thấy các phân số đều có tử số khác 1, mẫu số đã tách thành tích các thừa số “liên kết” nhau, tuy nhiên hiệu hai thừa số ở mẫu số không bằng tử số. Ta nhận xét thấy tổng hai thừa số ở mẫu số đều gấp 2 lần tử số. Do đó ta nghĩ đến việc nhân thêm 2 để đưa về dạng tổng thừa số ở mẫu số bằng tử số ( $\frac{b+a}{a \times b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ )

bằng tử số ( $\frac{b+a}{a \times b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ )

$$\text{Giải: } A = \frac{2}{1 \times 3} - \frac{4}{3 \times 5} + \frac{6}{5 \times 7} - \dots - \frac{20}{19 \times 21}$$

$$2 \times A = \frac{4}{1 \times 3} - \frac{8}{3 \times 5} + \frac{12}{5 \times 7} - \dots - \frac{40}{19 \times 21}$$

$$2 \times A = \frac{1+3}{1 \times 3} - \frac{3+5}{3 \times 5} + \frac{5+7}{5 \times 7} - \dots - \frac{19+21}{19 \times 21}$$

$$2 \times A = \left( \frac{3}{1 \times 3} + \frac{1}{1 \times 3} \right) - \left( \frac{5}{3 \times 5} + \frac{3}{3 \times 5} \right) + \left( \frac{7}{5 \times 7} + \frac{5}{5 \times 7} \right) - \dots - \left( \frac{21}{19 \times 21} + \frac{19}{19 \times 21} \right)$$

$$2 \times A = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) - \dots - \left( \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \right)$$

$$2 \times A = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots - \frac{1}{19} - \frac{1}{21} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

$$A = \frac{20}{21} : 2 = \frac{10}{21}$$

### 2.3 Bài tập tự giải

**Bài 7:** Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{99 \times 101}$

**Bài 8:** Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{2}{3 \times 7} + \frac{2}{7 \times 11} + \frac{2}{11 \times 15} + \dots + \frac{2}{99 \times 103}$

**Bài 9:** Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{7}{2} + \frac{7}{6} + \frac{7}{12} + \frac{7}{20} + \frac{7}{30} + \frac{7}{42} + \frac{7}{56} + \frac{7}{72} + \frac{7}{90}$

**Bài 10:** Tính giá trị  $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{120}$

**Bài 11:** Tính giá trị  $A = \frac{5}{3 \times 6} + \frac{5}{6 \times 9} + \frac{5}{9 \times 12} + \frac{5}{12 \times 15} + \dots + \frac{5}{96 \times 99}$

**Bài 12:** Tính  $A = \frac{505}{10 \times 1212} + \frac{505}{12 \times 1414} + \frac{505}{14 \times 1616} + \dots + \frac{505}{96 \times 9898}$

**Bài 13:** Tính  $A = 1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90}$

**Bài 14:** Tính  $A = \frac{1}{15} + \frac{2}{45} + \frac{3}{135} + \frac{4}{345} + \frac{5}{759}$

**Bài 15:** (Đề thi Toán Châu Á Thái Bình Dương APMOPS 2013)

Tính  $A = 10 \times \left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{5}{2 \times 3} + \frac{11}{3 \times 4} + \frac{19}{4 \times 5} + \dots + \frac{89}{9 \times 10} \right)$

**Bài 16(\*):** Tính  $M = \frac{10}{56} + \frac{10}{140} + \frac{10}{260} + \dots + \frac{10}{1400}$

**Bài 17(\*):** Tính giá trị:  $S = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{44} + \frac{1}{77} + \frac{1}{119} + \frac{1}{170}$

**Bài 18:** Tính  $A = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+99}$

**Bài 19(\*):** Tính giá trị:  $S = \frac{2+3}{1+2+3} + \frac{2+3+4}{1+2+3+4} + \dots + \frac{2+3+\dots+2013+2014}{1+2+3+\dots+2013+2014}$

**Bài 20:** Tính giá trị  $A = \frac{7}{2} + \frac{7}{6} + \frac{7}{12} + \frac{7}{20} + \frac{7}{30} + \frac{7}{42} + \frac{7}{56} + \frac{7}{72} + \frac{7}{90}$

**Bài 21(\*)**: Tính giá trị  $A = \frac{3}{1 \times 1 \times 2 \times 2} + \frac{5}{2 \times 2 \times 3 \times 3} + \frac{7}{3 \times 3 \times 4 \times 4} + \frac{9}{4 \times 4 \times 5 \times 5} + \dots + \frac{19}{9 \times 9 \times 10 \times 10}$

**Bài 22(\*\*)**: Tính giá trị  $A = 1 - \frac{11}{6} + \frac{19}{12} - \frac{29}{20} + \frac{41}{30} - \frac{55}{42} + \frac{71}{56} - \frac{89}{72} + \frac{109}{90}$

MathSpace