

CHUYÊN ĐỀ: CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ
TÍNH NHANH DÃY PHÂN SỐ CÓ QUY LUẬT

1. Dãy phân số có quy luật mẫu số sau gấp mẫu số trước 1 số không đổi
Quy luật mẫu số là dãy số tăng theo cấp số nhân.

Đây là dạng toán liên quan đến tính tổng của 1 loạt các phân số mà mẫu số phân số sau gấp mẫu số phân số trước cùng 1 số lần.

Bài 1: Tính giá trị $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

Phân tích: Nhận xét thấy mẫu số phân số sau hơn mẫu số phân số ngay trước là 2 lần. Như vậy khi ta nhân thêm 2 vào thì phân số phía sau sẽ trở thành phân số phía trước.

Ví dụ: $2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$, như vậy sau khi nhân thêm 2 ta sẽ 1 loạt các phân số của biểu thức sau khi nhân giống với biểu thức trước khi nhân, rất thuận tiện để ta giản ước.

Giải: Ta có $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ (1)

$$2xA = 2x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right)$$

$$2xA = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$
 (2)

Nhìn vào (1) và (2), chúng ta nhận xét thấy ở A và 2xA có rất nhiều phân số giống nhau, chỉ khác nhau phân số đầu tiên và phân số cuối cùng. Nếu ta trừ 2 vế cho nhau thì được:

$$A = 2xA - A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Bài 2: Tính $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$

Giải: Ta có: $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$

$$\Rightarrow 3 \times A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

Trừ hai vế ta có: $3 \times A - A = 2 \times A = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729}\right)$

$$\Rightarrow 2 \times A = 1 - \frac{1}{729} = \frac{728}{729}$$

$$\Rightarrow A = \frac{728}{729} : 2 = \frac{364}{729}$$

Chú ý: Ở bài này, mẫu số sau gấp mẫu số trước 3 lần, khi đó ta nhân thêm 3 để rồi trừ hai vế nhằm triệt tiêu các phân số ở giữa. Cần chú ý lúc này hiệu hai vế sẽ là $3 \times A - A = 2 \times A$. Vì thế chúng ta cần chia cho 2 để tìm ra kết quả A. Học sinh thường ẩu và khi nháp không cẩn thận phần này nên quên chia 2 dẫn đến đáp số không đúng.

Bài 3: Tính giá trị: $A = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{24} \dots + \frac{2}{768}$

Ta thấy mẫu số của phân số sau của A gấp 2 lần mẫu số của phân số trước của A.

$$\text{Ta có: } 2 \times A = 2 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{6} + 2 \times \frac{2}{12} + \dots + 2 \times \frac{2}{768} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \dots + \frac{2}{384}$$

$$\Rightarrow A = 2 \times A - A = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \dots + \frac{2}{384} \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{24} \dots + \frac{2}{768} \right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{768} = \frac{511}{384}$$

Bài 4: Tính giá trị biểu thức sau: $S = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \dots + \frac{1025}{1024}$

Phân tích và Giải: Ở bài này chúng ta quan sát tử số và mẫu số, ta thấy tử số đều hơn mẫu số 1 đơn vị.

$$\text{Ta nhận xét thấy: } \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}; \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}; \dots \frac{1025}{1024} = 1 + \frac{1}{1024}$$

$$\text{Vậy ta có: } S = 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{8} + \dots + 1 + \frac{1}{1024}$$

Vì số $1024 = 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$ (có 10 số 2 nhân với nhau) nên ta có:

$$S = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} \right)$$

Đến đây, ta đã đưa được về bài toán cơ bản:

$$S = 10 + A; \text{ trong đó } A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$$

$$\text{Ta có: } 2 \times A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{512}$$

$$\Rightarrow A = 2 \times A - A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{512} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} \right) = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

$$\text{Vậy } S = 10 + \frac{1023}{1024} = \frac{11263}{1024} \text{ (hay viết dưới dạng hỗn số là } 10 \frac{1023}{1024} \text{)}$$

Bài tập tự giải:

Bài 5: Tính giá trị của : $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$

Bài 6: Tính giá trị $A = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{3}{128}$

Bài 7: Tính giá trị: $A = \frac{6}{5} + \frac{6}{10} + \frac{6}{20} + \frac{6}{40} + \dots + \frac{6}{640}$

Bài 8: Tính giá trị: $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{2187}$

Bài 9: Tính giá trị biểu thức: $S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{15625}$

Bài 10: Tính giá trị biểu thức sau: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{256} + \frac{1}{384}$

Gợi ý: Tách thành tổng 2 dãy phân số có quy luật

Bài 11: Tính giá trị biểu thức sau: $S = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{8} + \frac{65}{16} + \frac{161}{32} + \dots + \frac{10241}{1024}$

Gợi ý: Gợi ý cho bài này là hãy suy nghĩ và quan sát đề bài thật kỹ ☺ ☺ ☺

Bài 12: Tính giá trị biểu thức sau: $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024}$

Gợi ý: Hãy nhân S x 2 rồi cộng hai vế.

Bài 13(*): Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 18} + \frac{1}{18 \times 27} + \frac{1}{27 \times 54}$

Bài 14(*): Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{2 \times 8} + \frac{1}{8 \times 4} + \frac{1}{4 \times 16} + \frac{1}{16 \times 8}$

Bài 15: Tính giá trị biểu thức sau: $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \frac{31}{32} + \dots + \frac{1023}{1024}$

Đón đọc phần tiếp theo: *Dãy phân số có quy luật mẫu “triệt tiêu lẫn nhau”*